

**ISTITUTO GRAMSCI KEYNES PRATO
INDIRIZZO COSTRUZIONI AMBIENTE TERRITORIO
MATERIA: MATEMATICA PROF. ANNALISA MALOSSÌ**

PRODOTTI NOTEVOLI

UNITA' DI APPRENDIMENTO STRATIFICATA PRODOTTI NOTEVOLI

STEP 1 ORIENTAMENTO/RISCALDAMENTO	
	<ul style="list-style-type: none"> • Calcolo di prodotti notevoli usando solo le normali regole del calcolo algebrico (che la classe già conosce) • $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = \dots$ • $(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = \dots$ • $(a + b + c)^2 = (a + b + c) \cdot (a + b + c) = \dots$ • $(a + b) \cdot (a - b) = \dots$ • Attività (1) alla lavagna e in piccoli gruppi
STEP 2 PRESENTAZIONE DELL'INPUT	
	<p>Per ognuno dei prodotti notevoli l'insegnante presenta:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Regole di costruzione del prodotto notevole con parte grafica • Esempi <p>Attività (2) per riconoscere i termini del binomio/trinomio e calcolare i termini del prodotto notevole (in piccoli gruppi)</p>
STEP 3 MESSA A FUOCO	
	<p>Per ognuno dei prodotti notevoli: (in piccoli gruppi)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Attività (3) a scelta multipla, attività (4) tipo V/F • Attività (5) di abbinamento con frecce
STEP 4 MESSA IN PRATICA	
	<p>Per ognuno dei prodotti notevoli:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Attività (6) di individuazione e correzione errori (in piccoli gruppi) • Attività (7) di enunciazione delle regole per costruire il prodotto notevole (individuale) (+)
STEP 5/6 COLLEGAMENTI E FOLLOW UP	
	<p>Per tutti i tipi di prodotti notevoli:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Attività (8) costruzione di prodotti notevoli (sempre a piccoli gruppi)
STEP 7 VERIFICHE	
	<p>Test sulla costruzione di prodotti notevoli (individuale)</p>
PARTE SECONDA: DAL SEMPLICE ALLO STANDARD	
	<p>Una volta terminata l'unità didattica, il passo successivo sarà l'uso dei prodotti notevoli nelle espressioni algebriche</p>

UNITA' DI APPRENDIMENTO STRATIFICATA

PRODOTTI NOTEVOLI

STEP 1 ORIENTAMENTO/RISCALDAMENTO

Alcuni tipi di moltiplicazioni, in cui capita di imbattersi frequentemente, si possono effettuare in modo rapido, ricordando alcune semplici regole, chiamate PRODOTTI NOTEVOLI.

Noi ne studieremo quattro tipi. Per ognuno di questi procediamo usando le normali regole del calcolo algebrico (che la classe già conosce).

1) Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza		
	$(a + b) \cdot (a - b) =$ $a^2 - ab + ba - b^2 =$ $a^2 - b^2$	eseguendo le moltiplicazioni riducendo i termini simili
2) Il quadrato di un binomio		
	$(a + b)^2 =$ $(a + b) \cdot (a + b) =$ $a^2 + ab + ba + b^2 =$ $a^2 + 2ab + b^2$	proprietà delle potenze eseguendo le moltiplicazioni riducendo i termini simili
3) Il quadrato di un trinomio		
	$(a + b + c)^2 =$ $(a + b + c) \cdot (a + b + c) =$ $a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 =$ $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	proprietà delle potenze eseguendo le moltiplicazioni riducendo i termini simili
4) Il cubo di un binomio		
	$(a + b)^3 =$ $(a + b) \cdot (a + b)^2 =$ $(a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) =$ $a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 =$ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$	proprietà delle potenze eseguendo le moltiplicazioni riducendo i termini simili

Per ciascuno dei quattro prodotti si fanno esempi alla lavagna e poi esercizi in piccoli gruppi, usando solo le normali regole di calcolo algebrico.

Attività 1: esegui i seguenti prodotti usando le regole di calcolo algebrico che già conosci.

1) Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza		
	$(x + 3) \cdot (x - 3) =$...	eseguendo le moltiplicazioni riducendo i termini simili
2) Il quadrato di un binomio		
	$(3a - 2b)^2 =$ $(3a - 2b) \cdot (3a - 2b) =$...	proprietà delle potenze eseguendo le moltiplicazioni riducendo i termini simili
3) Il quadrato di un trinomio		
	$(1 - 2x + y)^2 =$ $(1 - 2x + y) \cdot (1 - 2x + y) =$...	proprietà delle potenze eseguendo le moltiplicazioni riducendo i termini simili
4) Il cubo di un binomio		
	$(x + 2y)^3 =$ $(x + 2y) \cdot (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$...	proprietà delle potenze eseguendo le moltiplicazioni riducendo i termini simili

Questo lavoro lungo e noioso serve per apprezzare il risparmio di tempo e fatica che si potrà ottenere conoscendo le regole dei prodotti notevoli.

STEP 2 PRESENTAZIONE DELL'INPUT

(Si ripete per ognuno dei quattro prodotti notevoli)

1) Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza

$$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$$

REGOLA:

Se A e B sono due monomi, il prodotto della somma di A e B per la loro differenza è uguale alla differenza tra il quadrato di A e il quadrato di B .

ESEMPIO: (è il primo di una serie di esempi da fare alla lavagna)

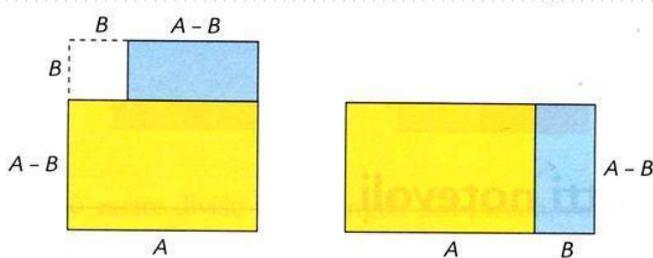
Calcoliamo $(2x + y^2) \cdot (2x - y^2)$

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
$(2x + y^2) \cdot (2x - y^2) = (2x)^2 - (y^2)^2 = 4x^2 - y^4$

VISUALIZZIAMO IL CONCETTO:

L'uguaglianza $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$ può essere dedotta anche per via grafica

Somma per differenza (interpretazione geometrica)



- Ritagliamo da un angolo di un quadrato di lato A un quadrato di lato B (a sinistra): si ottiene una figura di area $A^2 - B^2$ che è l'unione del rettangolo giallo e del rettangolo azzurro.
- Ritagliamo ora il rettangolo azzurro e incolliamolo a quello giallo (a destra): si ottiene un nuovo rettangolo di lati $A+B$ e $A-B$ avente area $(A+B)(A-B)$.
- Dall'equivalenza delle due figure segue $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

2) Il quadrato di un binomio

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

REGOLA:

Se A e B sono due monomi, il quadrato di $(A + B)$ è uguale al quadrato di A , più il quadrato di B , più il doppio prodotto di A e B .

ESEMPIO: (è il primo di una serie di esempi da fare alla lavagna)

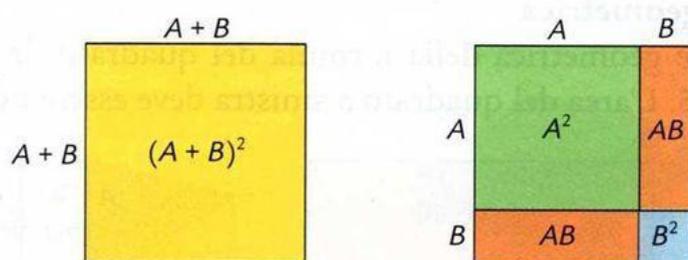
Calcoliamo $(2x + y^3)^2$

$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$
↓ ↓ ↓ ↓ ↓
$(2x + y^3)^2 = (2x)^2 + (y^3)^2 + 2(2x)(y^3) = 4x^2 + y^6 + 4xy^3$

VISUALIZZIAMO IL CONCETTO:

L'uguaglianza $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ può essere dedotta anche per via grafica

Quadrato di un binomio (interpretazione geometrica)



- Il quadrato di sinistra ha lato $A+B$ e quindi la sua area è $(A+B)^2$.
- Il quadrato di destra è diviso in due quadrati di area A^2 (verde) e B^2 (azzurro) e in due rettangoli di colore arancione, ognuno di area AB .
- Dall'equivalenza delle due figure segue $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

3) Il quadrato di un trinomio

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

REGOLA:

Se A , B e C sono tre monomi, il quadrato di $(A + B + C)$ è uguale al quadrato di A , più il quadrato di B , più il quadrato di C , più i doppi prodotti di ciascuno dei tre termini per tutti quelli che lo seguono.

ESEMPIO: (è il primo di una serie di esempi da fare alla lavagna)

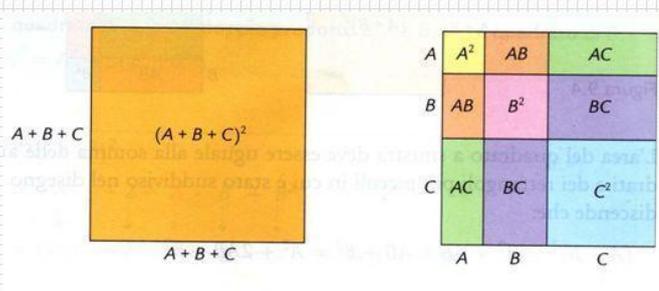
Calcoliamo $(2x + y^3 - 2)^2$

$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
$(2x + y^3 - 2)^2 = (2x)^2 + (y^3)^2 + (-2)^2 + 2(2x)(y^3) + 2(2x)(-2) + 2(y^3)(-2) = 4x^2 -$

VISUALIZZIAMO IL CONCETTO:

L'uguaglianza $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$ può essere dedotta anche per via grafica

Quadrato di un trinomio (interpretazione geometrica)



- Il quadrato di sinistra ha lato $A+B+C$ e quindi la sua area è $(A+B+C)^2$.
- Il quadrato di destra è diviso in un quadrato giallo di area A^2 , uno rosa di area B^2 e uno azzurro di area C^2 , in due rettangoli arancione ognuno di area AB , in due rettangoli verdi ognuno di area AC e in due rettangoli viola ognuno di area BC .
- Dall'equivalenza delle due figure segue $(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$.

4) Il cubo di un binomio

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$$

REGOLA:

Se A e B sono due monomi, il cubo di (A + B) è uguale al cubo di A, più il cubo di B, più il triplo prodotto del quadrato di A per B, più il triplo prodotto di A per il quadrato di B.

ESEMPIO: (è il primo di una serie di esempi da fare alla lavagna)

Calcoliamo $(2x + y^2)^3$

$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
$(2x + y^2)^3 = (2x)^3 + (y^2)^3 + 3(2x)^2(y^2) + 3(2x) = 8x^3 + y^6 + 12x^2y^2 + 6xy^4$



PER OGNUNO DEI PRODOTTI NOTEVOLI: attività a piccoli gruppi

Attività 2: riconoscere i termini del binomio/trinomio e calcolare i termini del prodotto notevole.

Attività 2.1 Segui le istruzioni per calcolare il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza, completando la tabella per righe.

Somma per differenza tra due monomi	Calcola il quadrato del monomio che ha lo stesso segno nei due binomi	Calcola il quadrato del monomio che ha segno discorde nei due binomi	Scrivi la differenza tra il primo e il secondo quadrato che hai calcolato
$(A + B) \cdot (A - B)$	A^2	B^2	$A^2 - B^2$
$(3a + 5b) \cdot (3a - 5b)$	$(3a)^2 = 9a^2$	$(5b)^2 = 25b^2$	$9a^2 - 25b^2$
$(2x - 3y) \cdot (-2x - 3y)$	$(-3y)^2 = 9y^2$	$(2x)^2 = 4x^2$	$9y^2 - 4x^2$
⋮			

Attività 2.2 Segui le istruzioni per calcolare il quadrato di un binomio, completando la tabella per righe.

Quadrato di binomio	Individua il primo monomio	Individua il secondo monomio	Calcola il quadrato del primo monomio	Calcola il quadrato del secondo monomio	Calcola il doppio prodotto	Scrivi la somma algebrica di ciò che hai calcolato
$(A + B)^2$	A	B	A^2	B^2	$2AB$	$A^2 + B^2 + 2AB$
$(-5a + b)^2$	$-5a$	b	$(-5a)^2 = 25a^2$	b^2	$-10ab$	$25a^2 + b^2 - 10ab$
$(3x + \frac{1}{2}y)^2$						
⋮						

Attività 2.3 Segui le istruzioni per calcolare il quadrato di un trinomio, completando la tabella per righe.

Quadrato di trinomio	Calcola il quadrato del primo monomio	Calcola il quadrato del secondo monomio	Calcola il quadrato del terzo monomio	Calcola i doppi prodotti	Scrivi la somma algebrica di ciò che hai calcolato
$(A + B + C)^2$	A^2	B^2	C^2	$2AB + 2AC + 2BC$	$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$
$(-5a + b - 3)^2$	$25a^2$	b^2	9	$-10ab + 30a - 6b$	$25a^2 + b^2 + 9 - 10ab + 30a - 6b$
$(3x + \frac{1}{2}y - a)^2$					
⋮					

Attività 2.4 Segui le istruzioni per calcolare il cubo di un binomio, completando la tabella per righe.

Cubo di binomio	Calcola il cubo del primo monomio	Calcola il cubo del secondo monomio	Calcola il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo monomio	Calcola il triplo prodotto del primo monomio per il quadrato del secondo monomio	Scrivi la somma algebrica di ciò che hai calcolato
$(A + B)^3$	A^3	B^3	$3A^2B$	$3AB^2$	$A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$
$(3x + \frac{1}{2}y)^3$	$27a^3$	$\frac{1}{8}y^3$	$3(3x)^2(\frac{1}{2}y) = \frac{27}{2}x^2y$	$3(3x)(\frac{1}{2}y)^2 = \frac{9}{4}xy^2$	$27a^3 + \frac{1}{8}y^3 + \frac{27}{2}x^2y + \frac{9}{4}xy^2$
⋮					

STEP 3 MESSA A FUOCO

In questa fase si fanno esercizi, sempre a piccoli gruppi, su ogni singolo prodotto notevole (abbinamento con frecce), ma anche su prodotti notevoli diversi (risposta multipla o vero/falso).

Attività 3: (abbinamento con frecce) associare con frecce ad ogni polinomio nella prima colonna il prodotto notevole di cui è lo sviluppo

Attività 3.1 SOMMA PER DIFFERENZA (per il primo binomio l'esercizio è svolto come esempio)

a)	$4x^2 - y^2$	A)	$(2x - y)(2x + y)$
b)	$y^2 - 4x^2$	B)	$(-2x - y)(-2x + y)$
c)	$x^2 - 4y^2$	C)	$(-y - 2x)(-y + 2x)$
d)	$4y^2 - x^2$	D)	$(2y - x)(2y + x)$
		E)	$(x + 2y)(x - 2y)$
		F)	$(-x - 2y)(-x + 2y)$
		G)	$(y - 2x)(y + 2x)$

Attività 3.2 QUADRATO DI BINOMIO (per il primo binomio l'esercizio è svolto come esempio)

a)	$x^2 - 2xy + y^2$	A)	$(x - y)^2$
b)	$x^2 + 2xy + y^2$	B)	$(1 - 2a)^2$
c)	$1 - 4a + 4a^2$	C)	$(-1 - 2a)^2$
d)	$-1 - 4a - 4a^2$	D)	$-(1 + 2a)^2$
e)	$1 + 4a + 4a^2$	E)	$(2a - 1)^2$
		F)	$(y - x)^2$
		G)	$(-x - y)^2$

Attività 3.3 CUBO DI BINOMIO (per il primo binomio l'esercizio è svolto come esempio)

a)	$x^3 + 9x^2 + 27x + 27$	A)	$(3 - x)^3$
b)	$-x^3 - 9x^2 - 27x - 27$	B)	$(3 + x)^3$
c)	$x^3 - 9x^2 + 27x - 27$	C)	$(-3 - x)^3$
d)	$-x^3 + 9x^2 - 27x + 27$	D)	$-(3 + x)^3$
		E)	$(x - 3)^3$

Attività 4: (risposte a scelta multipla)

1. Si riconoscono come prodotti notevoli		2. Il polinomio quadrato di un binomio è	
A	Solo il quadrato e il cubo di binomio	A	Sempre un binomio
B	Tutti i prodotti tra polinomi	B	Sempre un quadrinomio
C	Solo le potenze di binomio	C	Sempre un trinomio
D	Alcuni prodotti tra polinomi con particolari caratteristiche	D	Sempre un trinomio di secondo grado
3. Il grado del quadrato di un binomio è		4. Nel quadrato di un binomio il doppio prodotto è	
A	Sempre due	A	Positivo se i termini del binomio sono concordi
B	Sempre pari	B	Sempre positivo
C	Non si può dire prima di eseguire il calcolo	C	Positivo solo se i termini del binomio sono positivi
D	Può essere dispari	D	Positivo se i termini del binomio sono discordi
5. Sviluppando $(a - \frac{1}{2})^2$ si ottiene		6. Il polinomio $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + xy$ è lo sviluppo di	
A	$a^2 + \frac{1}{4}$	A	$(-x - \frac{y}{4})^2$
B	$a^2 + \frac{1}{4} - 1$	B	$(-x + \frac{y}{2})^2$
C	$a^2 + \frac{1}{4} - 2a$	C	$(x - \frac{y}{2})^2$
D	$a^2 + \frac{1}{4} - a$	D	$(x + \frac{y}{2})^2$
7. Il prodotto $(x - 5)(-5 - x)$ è		8. Il cubo di un binomio è	
A	$x^2 - 25$	A	Un binomio con i coefficienti multipli di tre
B	$25 - x^2$	B	Un quadrinomio
C	$-x^2 - 25$	C	Un trinomio
D	$(x - 5)^2$	D	Un quadrinomio con i coefficienti multipli di tre
9. Qual è lo sviluppo di $(a + 2)^3$?		10. Qual è lo sviluppo di $(a + b - 1)^2$?	
A	$a^3 + 8$	A	$a^2 + b^2 + 1$
B	$a^3 + 8 + 6a$	B	$a^2 + b^2 + 1 - 2a + 2ab - 2b$
C	$a^3 + 8 - 6a^2 - 12a$	C	$a^2 + b^2 + 1 - 2a - 2ab + 2b$
D	$a^3 + 8 + 6a^2 + 12a$	D	$a^2 + b^2 - 1$

⋮
⋮
⋮

⋮
⋮
⋮

Attività 5: (vero/falso)

A.	Il quadrato del binomio $(a + 3b)$ è uguale ad $a^2 + 9b^2$	V	F
B.	Due binomi opposti hanno lo stesso quadrato	V	F
C.	Il quadrato di un polinomio è dato dal prodotto del polinomio per se stesso	V	F
D.	Due binomi opposti hanno cubi opposti	V	F

A.	Il prodotto $(a - x)(a + 2x)$ non è un prodotto notevole	V	F
B.	Il cubo del binomio $(a + 2b)$ è uguale ad $a^3 + 8b^3$	V	F
C.	Il quadrato di un trinomio è un trinomio	V	F
D.	I quadrati di due binomi opposti sono opposti	V	F
E.	Il cubo di un binomio è un trinomio		

·
·
·
·
·

STEP 4 MESSA IN PRATICA

Per ognuno dei prodotti notevoli si può fare attività di individuazione e correzione errori (sempre a piccoli gruppi)

Attività 6: nel calcolo dei seguenti prodotti notevoli sono stati commessi degli errori; individuali e correggili.

Attività 6.1 SOMMA PER DIFFERENZA

Forma errata	Tipo di errore	Forma esatta
$(x^3 - 2)(x^3 + 2) = x^9 - 4$	Errato il quadrato del primo termine	$(x^3 - 2)(x^3 + 2) = x^6 - 4$
$(-3 - x)(x - 3) = x^2 - 9$		
$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 2$		
⋮		

Attività 6.2 QUADRATO DI BINOMIO/TRINOMIO

Forma errata	Tipo di errore	Forma esatta
$(a + b)^2 = a^2 + b^2$	Manca il doppio prodotto	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$		
$(-1 - x^2)^2 = -1 + 2x^2 - x^4$		
⋮		
$(a + b + 1)^2 = a^2 + b^2 + 1 + ab + a +$		
$(2a - b - 2)^2 = 4a^2 + b^2 + 4$		
⋮		

Attività 6.3 CUBO DI BINOMIO

Forma errata	Tipo di errore	Forma esatta
$(a + b)^3 = a^3 + b^3$	Mancano i tripli prodotti	$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$
$(a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - b^3$		
$(x - y)^3 = x^3 - y^3$		
⋮		

Attività 7: In questa fase si può inoltre fare attività (individuale) di enunciazione delle regole per costruire il prodotto notevole (solo per studenti senza particolari bisogni linguistici).

STEP 5/6 COLLEGAMENTI E FOLLOW UP

Attività 8: Costruzione di prodotti notevoli (esercizi di applicazione a due livelli)

Le schede sono a due livelli: (sempre a piccoli gruppi)

- Separate per ogni tipo di prodotto notevole (Tabelle 8.1)
- Tutti i prodotti notevoli insieme (Tabella 8.2)

Attività 8.1.1 SOMMA PER DIFFERENZA Completa la tabella

Somma per differenza	Calcola la somma per differenza
$(\frac{1}{2}x^2 - 2a)(\frac{1}{2}x^2 + 2a)$	
$(-a - \frac{5}{2})(\frac{5}{2} - a)$	
$(x^3 + y)(x^3 - y)$	
⋮	

Attività 8.1.2 QUADRATO DI BINOMIO Completa la tabella

Quadrato di binomio	Calcola il quadrato del binomio
$(3ab - 2x^3)^2$	
$(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2})^2$	
$(\frac{3}{2}x^2 - 2)^2$	
⋮	

Attività 8.1.3 QUADRATO DI TRINOMIO Completa la tabella

Quadrato di trinomio	Calcola il quadrato del trinomio
$(1 + 3ab - 2x^3)^2$	
$(\frac{2}{3}x - 1 - \frac{3}{2})^2$	
$(\frac{3}{2}x^2 - 2 + x)^2$	
⋮	

Attività 8.1.4 CUBO DI BINOMIO Completa la tabella

Cubo di binomio	Calcola il cubo del binomio
$(3ab - 2x^3)^3$	
$(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2})^3$	
$(\frac{3}{2}x^2 - 1)^3$	
⋮	

Attività 8.2 PRODOTTI NOTEVOLI Completa la tabella (alcuni campi sono stati riempiti per esempio)

Espressione	Tipo di prodotto notevole	Calcolo del prodotto notevole
$\left(\frac{2}{3}x - 1 - \frac{3}{2}\right)^2$	Quadrato di trinomio	
$\left(\frac{3}{2}x^2 - 1\right)^3$		
$\left(-a - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2} - a\right)$	Somma per differenza	
$\left(-a + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2} - a\right)$	Quadrato di binomio $\left(\frac{5}{2} - a\right)^2$	
$(a + b)(a + b)(a + b)$	Cubo di binomio $(a + b)^3$	
⋮		

STEP 7 VERIFICHE

Test sulla costruzione di prodotti notevoli (individuale)

Anche la verifica può essere fatta a livelli diversi:

- Più semplice, come le tabelle di tipo 8.1, raggruppando i vari tipi di prodotto notevole e presentandoli in forma standard
- Più complessa, come la tabella di tipo 8.2, chiedendo di riconoscere il tipo di prodotto notevole e presentandolo anche in forma non standard.

Esempio di verifica: Calcola i seguenti prodotti notevoli.

1) $(3x - \frac{1}{2}y)(3x + \frac{1}{2}y)$

2) $(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y)(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y)$

3) $(2a - b)(-2a - b)$

4) $(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}y)^2$

5) $(\frac{1}{2}a^2 - 3b^3)^2$

6) $(-\frac{1}{3}a^2 - \frac{2}{3}b)^2$

7) $(3x - \frac{1}{2}y + 2)^2$

8) $(a^2 - 2a + 1)^2$

9) $(-x^3 - \frac{1}{2}x + 2)^2$

10) $(\frac{1}{3}x^2 + 2y)^3$

11) $(\frac{1}{2}a - 2b)^3$

12) $(-3a - \frac{1}{3}b)^3$

13) $(\frac{1}{2}a - 1)^4$

14) $(\frac{1}{2}x - 2)(\frac{1}{4}x^2 + 4)(\frac{1}{2}x + 2)$

15) $(\frac{1}{2}a + 3b)^2(\frac{1}{2}a - 3b)^2$

16) $(a - 2b)^3(a + 2b)^3$

